Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 4. Probabilità condizionata, indipendenza, Teorema di Bayes

Esercizio A. Sia $D = B \cup C$. Considerando che $A \cap D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathsf{P}(A \cup D) \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(D) - \mathsf{P}(A \cap D) \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cup C) - \mathsf{P}\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(B \cap C) \\
&\quad - \left[\mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(A \cap B \cap C)\right] \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) \\
&\quad - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Esercizio B. Si indichi con Ω l'insieme dei punti interni al cerchio e con r il raggio del cerchio. Si indichi inoltre con A l'insieme dei punti interni al cerchio concentrico al primo avente raggio pari a $r/2$. Siccome A consta esattamente di quei punti di Ω che sono più vicini al centro che alla circonferenza, allora

$$p = \mathsf{P}(A) = \frac{\text{area di } A}{\text{area di } \Omega} = \frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = 1/4.$$

Esercizio C. a) Si definiscano gli eventi $A = \{$si presenta “testa” in tutti i lanci$\}$, $B = \{$si presenta “testa” al primo lancio$\}$ e $C = \{$si presenta almeno una “testa”$\}$.
(i) La probabilità condizionata di A dato B è data da

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4.$$

(ii) La probabilità condizionata di A dato C è data da

$$\mathsf{P}(A|C) = \frac{\mathsf{P}(A \cap C)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{1/8}{7/8} = 1/7.$$

b) (i) Siccome $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 1/2$ e $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}\left(\{C, C, T\}, \{T, C, C\}\right) = 1/4$, essendo $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora A e B sono indipedenti.
(ii) Siccome $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 3/8$ e $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/4$, essendo $\mathsf{P}(A \cap B) \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora A e B non sono indipedenti.
c) Siccome

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A) = (1/2) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (3/4) = 13/24, \\
&\mathsf{P}(B) = (1/2) \cdot (2/3) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (1/4) \cdot (2/3) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 119/288, \\
&\mathsf{P}(A \cap B) = (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 7/32,
\end{aligned}$$

essendo $\mathsf{P}(A \cap B) \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora A e B non sono indipedenti.

Esercizio D. Si denoti con $T = \{\text{il test è positivo}\}$ e con $A = \{\text{il soggetto ha l'AIDS}\}$. Si richiede $\mathsf{P}(A|T)$. Per il Teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A|T) &= \frac{\mathsf{P}(T|A) \cdot \mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(T|A) \cdot \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(T|\overline{A}) \cdot \mathsf{P}(\overline{A})} \\
&= \frac{0,99 \cdot (1/10000)}{0,99 \cdot (1/10000) + 0,05 \cdot (9999/10000)} \simeq 0,002.
\end{aligned}$$

Esercizio E. Posto $A = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_1\}$, $B = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_2\}$, $C = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_3\}$ e $R = \{\text{la pallina è rossa}\}$, si richiede $\mathsf{P}(A|R)$. Per il Teorema di Bayes

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A|R) &= \frac{\mathsf{P}(A \cap R)}{\mathsf{P}(R)} \\
&= \frac{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(R|A)}{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(R|A) + \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(R|B) + \mathsf{P}(C) \cdot \mathsf{P}(R|C)} \\
&= \frac{(1/3) \cdot (3/8)}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = 45/173.
\end{aligned}$$