Marco Minozzo
Laurea in Economia e Management delle Imprese di Servizi
Università degli Studi di Verona

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 3. Spazi di probabilità

Esercizio A. a) Le probabilità richieste sono date da $\mathsf{P}(B_1) = 15/25 = 3/5$, $\mathsf{P}(B_2) = 3/5$, $\mathsf{P}(B_1 \cap B_2) = 9/25$.
b) Le probabilità richieste sono date da $\mathsf{P}(B_1) = 12/20 = 3/5$, $\mathsf{P}(B_2) = 3/5$, $\mathsf{P}(B_1 \cap B_2) = 6/20 = 3/10$.

Esercizio B. a) Posto $A = \{(C, C), (T, C)\}$, si ha $\mathsf{P}(A) = 1/2$.
b) Posto

$$B_1 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ e } C_j \text{ appartengono ai “cuori”}\},$$
$$B_2 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ è un 3}\},$$

si richiede di calcolare la probabilità di $B_1 \cup B_2$ la quale è data da

$$\mathsf{P}(B_1 \cup B_2) = \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2) - \mathsf{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} + \frac{4 \cdot 51}{52 \cdot 51} - \frac{1 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{348}{2652}.$$

Esercizio C. La probabilità richiesta è data da

$$\mathsf{P}\{(r_1, \ldots, r_{10}) : \text{nella 10-pla compaiono 5 “si” e 5 “no”}\} = 252/(2^{10}).$$

Esercizio D. Le probabilità richieste sono date da: $\mathsf{P}(A) = 3/12 = 1/4$;
$\mathsf{P}(B) = 8/12 = 2/3$;
$\mathsf{P}(C) = 4/12 = 1/3$;
$\mathsf{P}(A \cup B) = 10/12 = 5/6$;
$\mathsf{P}(B \cap C) = \mathsf{P}(C) = 1/3$;
$\mathsf{P}(B - (A \cup C)) = 3/12 = 1/4$.

Esercizio E. a) (i) Poichè la somma dei valori assunti dalla funzione $\mathsf{P}(\cdot)$ sugli eventi elementari dello spazio campionario è maggiore di 1, essa non definisce una funzione di probabilità su Ω.
(ii) I valori assunti dalla funzione $\mathsf{P}(\cdot)$ sugli eventi elementari sono non negativi e la loro somma è pari a 1; perciò $\mathsf{P}(\cdot)$ definisce una funzione di probabilità su Ω.
b) (i) Sia $\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = p$. Allora, affinchè $\mathsf{P}(\cdot)$ sia una funzione di probabilità, la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere uguale a 1, cioè deve essere

$$p + 1/3 + 1/6 + 1/9 = 1,$$

e quindi $p = 7/18$.
(ii) Sia $\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = p$. Siccome

$$\mathsf{P}(\{\omega_3\}) = \mathsf{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) - \mathsf{P}(\{\omega_2\}) = 2/3 - 1/3 = 1/3,$$
$$\mathsf{P}(\{\omega_4\}) = \mathsf{P}(\{\omega_2, \omega_4\}) - \mathsf{P}(\{\omega_2\}) = 1/2 - 1/3 = 1/6,$$

allora deve essere

$$p + 1/3 + 1/3 + 1/6 = 1,$$

e quindi $p = 1/6$.

Esercizio F. Si difiniscano gli eventi $A = \{$la persona è un maschio$\}$ e $B = \{$la persona ha occhi scuri$\}$. Si richiede di calcolare la probabilità $\mathsf{P}(A \cup B)$. Allora, essendo $\mathsf{P}(A) = 10/30 = 1/3$, $\mathsf{P}(B) = 15/30 = 1/2$ e $\mathsf{P}(A \cap B) = 5/30 = 1/6$, risulta

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3.$$

Esercizio G. a) Sia $\mathsf{P}(\{1\}) = p$; allora $\mathsf{P}(\{j\}) = j \cdot p$, per $j = 1, \ldots, 6$. Siccome la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere pari a 1, si ottiene:

$$p \cdot \sum_{j=1}^{6} j = 1,$$

e cioè $p = 1/21$. Pertanto $\mathsf{P}(\{1\}) = 1/21$, $\mathsf{P}(\{2\}) = 2/21$, $\mathsf{P}(\{3\}) = 3/21$, $\mathsf{P}(\{4\}) = 4/21$, $\mathsf{P}(\{5\}) = 5/21$ e $\mathsf{P}(\{6\}) = 6/21$.
b) Le probabilità richieste sono date da $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{2, 4, 6\}) = 4/7$, $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\{1, 2, 3, 5\}) = 11/21$ e $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\{1, 3, 5\}) = 3/7$.
c) (i) L'evento che si presenti un numero pari o un numero primo è $A \cup B$ che coincide con l'intero spazio campionario, pertanto la probabilità di tale evento è pari a 1.
(ii) L'evento che si presenti un numero primo dispari è $B \cap C = \{1, 3, 5\} = C$, pertanto $\mathsf{P}(B \cap C) = 3/7$.
(iii) L'evento che si verifichi A ma non B è $A - B = \{4, 6\}$, pertanto $\mathsf{P}(A - B) = 10/21$.