

**Calcolo delle Probabilità****Soluzioni 12. Variabili aleatorie doppie discrete: covarianza, correlazione e valore atteso condizionato**

**Esercizio A. a)** Per la covarianza ed il coefficiente di correlazione tra  $X$  e  $Y$ , rispetto alla distribuzione congiunta A, si ottiene:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 x \cdot y \cdot f(x, y) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (1/6) + 0 + 0 + 0 + 2 \cdot 2 \cdot (2/6) + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 3 \cdot (3/6) \\ &= (1/6) + (8/6) + (27/6) = 36/6 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) = (1/6) + (4/6) + (9/6) = 14/6 = 7/3, \\ E(Y^2) &= E(X^2) = (1/6) + (8/6) + (27/6) = 6, \\ \text{Var}(Y) &= \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - (49/9) = 5/9, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = 6 - (49/9) = 5/9, \\ \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = 1. \end{aligned}$$

**b)** Per la covarianza ed il coefficiente di correlazione tra  $X$  e  $Y$ , rispetto alla distribuzione congiunta B, essendo le due variabili aleatorie indipendenti, si ottiene:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{e} \quad \rho(X, Y) = 0.$$

**Esercizio B. a)** La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $Y$  è data da:

$y$	1	4
$P(Y = y)$	1/2	1/2

**b)** La distribuzione di probabilità congiunta è data da:

$x$	$y$	
	1	4
-2	0	1/4
-1	1/4	0
1	1/4	0
2	0	1/4

**c)** Per la covarianza e il coefficiente di correlazione tra  $X$  e  $Y$  si ottiene:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= -8 \cdot (1/4) - 1 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) + 8 \cdot (1/4) = 0, \\ E(X) &= -2 \cdot (1/4) - 1 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) + 2 \cdot (1/4) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot E(Y) = 0, \\ \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = 0.\end{aligned}$$

**Esercizio C.**

$$\text{a) } \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\sqrt{\text{Var}(Y)\text{Var}(X)}} = \rho(Y, X).$$

$$\text{b) } \rho(X, X) = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = \frac{E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)]}{\sqrt{[\text{Var}(X)]^2}} = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = 1.$$

$$\text{c) } \rho(X, -X) = \frac{\text{Cov}(X, -X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(-X)}} = \frac{E[(X - \mu_X)(-X - (-\mu_X))]}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = \frac{-\text{Cov}(X, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = -1.$$

**d1)** Nel caso  $Y = a + bX$ , con  $b > 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\rho(X, a + bX) &= \frac{\text{Cov}(X, a + bX)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(a + bX)}} = \frac{E(X \cdot (a + bX)) - E(X)E(a + bX)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot b^2\text{Var}(X)}} \\ &= \frac{E(aX + bX^2) - E(X)(a + bE(X))}{b\text{Var}(X)} = \frac{aE(X) + bE(X^2) - aE(X) - b[E(X)]^2}{b\text{Var}(X)} \\ &= \frac{b(E(X^2) - [E(X)]^2)}{b\text{Var}(X)} = \frac{b\text{Var}(X)}{b\text{Var}(X)} = 1.\end{aligned}$$

**d2)** Procedendo analogamente al punto d1), e ricordando che se  $b < 0$  allora  $b/|b| = -1$ , si ottiene:

$$\rho(X, a + bX) = \frac{\text{Cov}(X, a + bX)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(a + bX)}} = \frac{b\text{Var}(X)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot b^2\text{Var}(X)}} = \frac{b\text{Var}(X)}{|b|\text{Var}(X)} = -1.$$

**e)** Per il coefficiente di correlazione tra  $aX + b$  e  $cY + d$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\rho(aX + b, cY + d) &= \frac{\text{Cov}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{\text{Var}(aX + b)\text{Var}(cY + d)}} = \frac{E[(aX + b)(cY + d)] - E(aX + b)E(cY + d)}{\sqrt{a^2\text{Var}(X) \cdot c^2\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - acE(X)E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - bd}{|ac|\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{ac(E(XY) - E(X)E(Y))}{|ac|\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{ac}{|ac|} \cdot \rho(X, Y),\end{aligned}$$

e dunque

$$\rho(aX + b, cY + d) = \begin{cases} \rho(X, Y), & \text{se } a \text{ e } c \text{ hanno lo stesso segno,} \\ -\rho(X, Y), & \text{se } a \text{ e } c \text{ hanno segno opposto.} \end{cases}$$

**Esercizio D. b)** La distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 1$  è data da:

$y$	$1/2$	$2$
$P(Y = y X = 1)$	$1/3$	$2/3$

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= (1/2) \cdot (1/3) + 2 \cdot (2/3) = 1/6 + 4/3 = 3/2, \\ \text{Var}(Y|X=1) &= (1/4) \cdot (1/3) + 4 \cdot (2/3) - 9/4 = 6/12 = 1/2. \end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X=0$  è data da:

$y$	$1/2$	$2$
$P(Y=y X=0)$	$1/6$	$5/6$

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y|X=0) &= (1/2) \cdot (1/6) + 2 \cdot (5/6) = 1/12 + 10/6 = 7/4, \\ \text{Var}(Y|X=0) &= (1/4) \cdot (1/6) + 4 \cdot (5/6) - 49/16 = 5/16. \end{aligned}$$

c) La distribuzione di probabilità marginale di  $Y$  è data da:

$y$	$1/2$	$2$
$P(Y=y)$	$1/4$	$3/4$

e dunque si ottiene:

$$E(Y) = (1/2) \cdot (1/4) + 2 \cdot (3/4) = 1/8 + 6/4 = 13/8,$$

e si può quindi verificare che

$$E(Y|X=0) \cdot P(X=0) + E(Y|X=1) \cdot P(X=1) = (7/4) \cdot (1/2) + (3/2) \cdot (1/2) = 13/8 = E(Y).$$

**Esercizio E. a)** La distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X=0$  è data da:

$y$	$0$	$1$	$2$	$3$
$P(Y=y X=0)$	$0$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y|X=0) &= 1 \cdot (1/4) + 2 \cdot (1/2) + 3 \cdot (1/4) = 2, \\ \text{Var}(Y|X=0) &= 1 \cdot (1/4) + 4 \cdot (1/2) + 9 \cdot (1/4) - 4 = 1/2. \end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X=1$  è data da:

$y$	$0$	$1$	$2$	$3$
$P(Y=y X=1)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$0$

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) = 1, \\ \text{Var}(Y|X=1) &= 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/2) + 4 \cdot (1/4) - 1 = 1/2. \end{aligned}$$

**b)** La distribuzione di probabilità marginale di  $Y$  è data da:

$y$	$0$	$1$	$2$	$3$
$P(Y=y)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \cdot (3/8) + 2 \cdot (3/8) + 3 \cdot (1/8) = 3/2, \\ \text{Var}(Y) &= 1 \cdot (3/8) + 4 \cdot (3/8) + 9 \cdot (1/8) - 9/4 = 21/4. \end{aligned}$$

c) Si può verificare che:

$$\begin{aligned} E_X[E(Y|X)] &= E(Y|X=0) \cdot P(X=0) + E(Y|X=1) \cdot P(X=1) \\ &= 2 \cdot (1/2) + 1 \cdot (1/2) = 1 + 1/2 = 3/2 = E(Y). \end{aligned}$$