Marco Minozzo
Laurea in Economia e Management delle Imprese di Servizi
Università degli Studi di Verona

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 14. Legge (debole) dei grandi numeri

Combinazioni lineari

Esercizio A. a) Assumendo $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0,5$, valore atteso e varianza di Y sono dati da

$$\text{E}(Y) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 9.$$

b) Assumendo X_1 ed X_2 indipendenti, valore atteso e varianza di Y sono dati da

$$\text{E}(Y) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7.$$

Esercizio B. a) Indicando con $X = 10X_1 + 20X_2 + 30X_3$ il valore giornaliero del portafoglio, si ha:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= 10 \cdot 3 + 20 \cdot 2,5 + 30 \cdot 4 = 200, \\
\text{Var}(X) &= 10^2 \cdot 0,5 + 20^2 \cdot 0,8 + 30^2 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,6 + 2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0,6 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0,85 \\
&= 2890.
\end{aligned}$$

b) Nel caso in cui i tre titoli si comportino in modo indipendente si ottiene:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= 10 \cdot 3 + 20 \cdot 2,5 + 30 \cdot 4 = 200, \\
\text{Var}(X) &= 10^2 \cdot 0,5 + 20^2 \cdot 0,8 + 30^2 \cdot 1 = 1270.
\end{aligned}$$

Legge (debole) dei grandi numeri

Esercizio C. Per prima cosa verifichiamo che $\text{E}(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = 1,2$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= (1/10) \cdot (\mu - 2) + (2/10) \cdot (\mu - 1) + (4/10) \cdot (\mu) + (2/10) \cdot (\mu + 1) + (1/10) \cdot (\mu + 2) \\
&= [(1/10) + (2/10) + (4/10) + (2/10) + (1/10)] \cdot \mu - (2/10) - (2/10) + (2/10) + (2/10) \\
&= \mu, \\
\text{Var}(X) &= \text{E}[(X - \mu)^2] = (1/10) \cdot (-2)^2 + (2/10) \cdot (-1)^2 + (4/10) \cdot 0 + (2/10) \cdot (1)^2 + (1/10) \cdot (2)^2 \\
&= (4/10) + (2/10) + (2/10) + (4/10) \\
&= 12/10 = 1,2.
\end{aligned}$$

a) Valore atteso e varianza di $\overline{X}_n$ sono dati da:

$$\text{E}(\overline{X}_n) = \text{E}(X) = \mu, \quad \text{e} \quad \text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{1,2}{n}.$$

b) Applicando la disuguaglianza di Tcebycheff si ottiene:

$$\mathsf{P}(|\overline{X}_{100} - \mu| < 0,5) = \mathsf{P}\Big(|\overline{X}_{100} - \mu| < k \cdot (\sigma/\sqrt{n})\Big) \geq 1 - (1/k)^2.$$

Ponendo $k \cdot (\sigma/\sqrt{n}) = 0,5$ si ha $k = 0,5 \cdot \sqrt{n/\sigma^2} = 0,5 \cdot \sqrt{100/1,2}$, da cui $k^2 = 0,5^2 \cdot 100/1,2 = 20,83$. Pertanto

$$\mathsf{P}(|\overline{X}_{100} - \mu| < 0,5) \geq 1 - (1/k)^2 = 1 - (1/20,83) = 0,952.$$

c) Si vuole trovare n tale per cui

$$\mathsf{P}(|\overline{X}_n - \mu| < 0,2) \geq 0,95.$$

Dalla disuguaglianza di Tcebycheff si ha:

$$\mathsf{P}(|\overline{X}_n - \mu| < k \cdot (\sigma/\sqrt{n})) \geq 1 - (1/k)^2,$$

da cui si ottiene $1 - (1/k)^2 = 0,95$, e dunque $k^2 = 20$. Pertanto, considerando che

$$0,2 = k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \quad \text{si ottiene} \quad n = \frac{k^2\sigma^2}{(0,2)^2} = \frac{20 \cdot 1,2}{0,04} = 600.$$

Esercizio D. Indicando con n la numerosità del campione da esaminare, con $\overline{X}_n$ la media campionaria delle durate e con μ la media effettiva del nuovo processo, si vuole determinare n tale per cui

$$\mathsf{P}\Big(|\overline{X}_n - \mu| < 50\Big) \geq 0,99.$$

Applicando la disuguaglianza di Tchebycheff alla variabile aleatoria $\overline{X}_n$, si può scrivere:

$$\mathsf{P}\Big(|\overline{X}_n - \mathrm{E}(\overline{X}_n)| < k\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}\Big) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 0,99,$$

dove $\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \mu$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = 250^2/n$. Per cui, $k = 10$ e

$$50 = k\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)} = k\sqrt{250^2/n}, \quad \text{da cui} \quad n = 2500.$$