Marco Minozzo
Laurea in Economia e Management delle Imprese di Servizi
Università degli Studi di Verona

# Calcolo delle Probabilità

## Soluzioni 6. Variabili aleatorie continue: funzione di densità e funzione di ripartizione

**Esercizio A. a)** Le probabilità richieste sono date da:
$\mathsf{P}(X < 1,5) = F(1,5) = 1 - e^{-3} = 0,9502$;
$\mathsf{P}(X \geq 0,5) = 1 - F(0,5) = e^{-1} = 0,3679$;
$\mathsf{P}(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e^{-2} - e^{-4} = 0,1170$.

**b)** La funzione di densità della variabile aleatoria $X$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

**Esercizio B. a)** Le funzioni $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$ sono in effetti funzioni di densità in quanto sono funzioni non negative, cioè, $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \Re$ ed $f_Y(y) \geq 0$, $\forall y \in \Re$, ed il loro integrale da $-\infty$ a $\infty$ è pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 2x\ \mathrm{d}x = \Big[x^2\Big]_0^1 = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\ \mathrm{d}y = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\int_0^{\alpha} e^{-y}\ \mathrm{d}y\right] = \lim_{\alpha \to \infty} \Big[-e^{-y}\Big]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) = 1.$$

**b)** Le funzioni di ripartizione delle variabili aleatorie $X$ ed $Y$ sono date da:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

**c)** Le probabilità richieste sono date da:
(i) $\mathsf{P}(X > 0,75) = 1 - F_X(0,75) = 1 - (0,75)^2 = 0,4375$;
(ii) $\mathsf{P}(0,2 \leq X < 0,5) = F_X(0,5) - F_X(0,2) = (0,5)^2 - (0,2)^2 = 0,21$;
(iii) $\mathsf{P}(Y \geq 1,5) = 1 - F_Y(1,5) = 1 - (1 - e^{-1,5}) = e^{-1,5} = 0,2231$;
(iv) $\mathsf{P}(-3 < Y \leq 2) = F_Y(2) - F_Y(-3) = 1 - e^{-2} = 0,8647$.