

## Calcolo delle Probabilità

### Esercitazione 11. Variabili aleatorie doppie discrete: distribuzioni congiunte, marginali e condizionate; indipendenza

**Esercizio A.** Si consideri la seguente tabella di probabilità congiunte  $f(x, y)$  per le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$ :

$x$	$y$		
	1	4	5
2	$k$	0,1	0,2
5	$3k$	$2k$	0,2

- Determinare la costante  $k$  in modo tale che  $f(x, y)$  fornisca effettivamente una distribuzione di probabilità.
- Calcolare la funzione di ripartizione congiunta  $F(x, y)$ .
- Determinare le distribuzioni di probabilità marginali di  $X$  ed  $Y$ .
- Determinare la distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 2$  e la distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 5$ .
- Calcolare la probabilità che  $X$  ed  $Y$  siano entrambe superiori od uguali a 4.
- Calcolare  $P(Y \leq 4 | X = 2)$ .
- Verificare se le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  sono o meno indipendenti.

**Esercizio B.** Una moneta viene lanciata tre volte. Supponiamo che  $X$  assuma il valore 0 o 1 a seconda che si presenti testa o croce al primo lancio, e supponiamo che  $Y$  designi il numero di volte che si presenta testa.

- Determinare le distribuzioni di probabilità marginali di  $X$  ed  $Y$ .
- Determinare la distribuzione di probabilità congiunta di  $X$  ed  $Y$ .
- Determinare la distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 0$  e la distribuzione di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 1$ .
- Verificare se le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  sono o meno indipendenti.

**Esercizio C.** Si considerino le seguenti due distribuzioni di probabilità congiunte per le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$ :

Distribuzione A				Distribuzione B			
$x$	$y$			$x$	$y$		
	1	2	3		1	2	3
1	1/6	0	0	1	1/36	2/36	3/36
2	0	2/6	0	2	2/36	4/36	6/36
3	0	0	3/6	3	3/36	6/36	9/36

- a) Relativamente alla distribuzione A, determinare le distribuzioni di probabilità marginali di  $X$  ed  $Y$  e verificare se le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  sono o meno indipendenti.
- b) Relativamente alla distribuzione B, determinare le distribuzioni di probabilità marginali di  $X$  ed  $Y$  e verificare se le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  sono o meno indipendenti.
- c) Relativamente alla distribuzione B, determinare le distribuzioni di probabilità condizionate di  $Y$  dato  $X$ , per  $X = 1, 2, 3$ , e confrontarle con la distribuzione marginale di  $Y$ .
- d) Relativamente alla distribuzione B, verificare che le distribuzioni condizionate di  $X$  dato  $Y$  sono uguali alla distribuzione marginale di  $X$ .

**Esercizio D. (Facoltativo.)** Si assuma che la probabilità che un insetto deponga  $x$ ,  $x = 1, 2, \dots$ , uova segua una distribuzione di Poisson di media pari a  $\lambda$ . Si assuma inoltre che, una volta che le uova sono state deposte, la probabilità che un uovo si sviluppi in un nuovo insetto sia pari a  $p$ .

- a) Assumendo che le uova si comportino in modo indipendente, trovare la probabilità che da una “deposizione” si possano sviluppare  $y$  nuovi insetti,  $y = 0, 1, 2, \dots$ . (Sugg.: Si vuole trovare la distribuzione di probabilità marginale della variabile  $Y$ , tenendo presente che il numero di nuovi insetti non può essere superiore al numero di uova deposte. Considerando che il numero di nuovi insetti dato il numero di uova deposte segue uno schema binomiale, le probabilità congiunte  $P(X = x, Y = y)$  delle variabili  $X$  ed  $Y$ , possono essere trovate come  $P(Y = y|X = x) \cdot P(X = x)$ . Perciò, le probabilità marginali richieste possono essere trovate sommando le corrispondenti probabilità congiunte.)