

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 11. Variabili aleatorie doppie discrete: distribuzioni congiunte, marginali e condizionate; indipendenza

Esercizio A. a) Affinchè $f(x, y)$ fornisca effettivamente una distribuzione di probabilità, deve valere:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(x_i, y_j) = 1.$$

Per cui

$$k + 3k + 0, 1 + 2k + 0, 2 + 0, 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6k = 0, 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1/12.$$

b) La funzione di ripartizione congiunta $F(x, y)$ è data da:

	$y < 1$	$1 \leq y < 4$	$4 \leq y < 5$	$y \geq 5$
$x < 2$	0	0	0	0
$2 \leq x < 5$	0	1/12	11/60	23/60
$x \geq 5$	0	1/3	3/5	1

c) Le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y sono date da:

x	2	5
$f_X(x)$	23/60	37/60

y	1	4	5
$f_Y(y)$	1/3	4/15	2/5

d) Le distribuzioni di probabilità condizionate sono date da:

y	1	4	5
$P(Y = y X = 2)$	5/23	6/23	12/23

y	1	4	5
$P(Y = y X = 5)$	15/37	10/37	12/37

e) La probabilità che X ed Y siano entrambe uguali o superiori a 4 è data da:

$$P(X \geq 4, Y \geq 4) = f(5, 4) + f(5, 5) = 11/30.$$

f) La probabilità richiesta è data da:

$$P(Y \leq 4|X = 2) = P(Y = 1|X = 2) + P(Y = 4|X = 2) = 5/23 + 6/23 = 11/23.$$

g) Affinchè le variabili aleatorie X ed Y siano indipendenti deve valere $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, per $x = 2, 5$ e $y = 1, 4, 5$. Considerando $x = 2$ e $y = 1$, si può verificare che:

$$f(2, 1) = 1/12 \neq (23/60) \cdot (1/3) = f_X(2) \cdot f_Y(1).$$

Pertanto le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio B. Lo spazio campionario dell'esperimento è dato da:

$$\Omega = \{(T, T, T), (T, T, C), (T, C, T), (T, C, C), (C, T, T), (C, T, C), (C, C, T), (C, C, C)\}.$$

a) La distribuzione di probabilità marginale di X è data da:

$$f_X(0) = P(\text{al primo lancio si presenta "testa"}) = P((T, T, T), (T, T, C), (T, C, T), (T, C, C)) = 1/2,$$

$$f_X(1) = P(\text{al primo lancio si presenta "croce"}) = P((C, T, T), (C, T, C), (C, C, T), (C, C, C)) = 1/2.$$

Mentre la distribuzione di probabilità marginale di Y è data da:

$$f_Y(0) = P((C, C, C)) = 1/8, \quad f_Y(1) = P((T, C, C), (C, T, C), (C, C, T)) = 3/8,$$

$$f_Y(2) = P((T, T, C), (T, C, T), (C, T, T)) = 3/8, \quad f_Y(3) = P((T, T, T)) = 1/8.$$

b) La distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y si ricava come:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 1) = P((T, C, C)) = 1/8, \quad f(0, 2) = P((T, T, C), (T, C, T)) = 2/8,$$

$$f(0, 3) = P((T, T, T)) = 1/8, \quad f(1, 0) = P((C, C, C)) = 1/8,$$

$$f(1, 1) = P((C, T, C), (C, C, T)) = 2/8, \quad f(1, 2) = P((C, T, T)) = 1/8, \quad f(1, 3) = 0,$$

per cui si ottiene

x	y			
	0	1	2	3
0	0	1/8	1/4	1/8
1	1/8	1/4	1/8	0

c) Le distribuzioni di probabilità condizionate richieste sono date da:

y	0	1	2	3
$P(Y = y X = 0)$	0	1/4	1/2	1/4

y	0	1	2	3
$P(Y = y X = 1)$	1/4	1/2	1/4	0

d) Affinchè le variabili aleatorie X ed Y siano indipendenti deve aversi $P(Y = y|X = x) = P(Y = y) = f_Y(y)$, per $x = 0, 1$ e $y = 0, 1, 2, 3$. Come risulta evidente confrontando, ad esempio, la distribuzione condizionata di Y dato $X = 0$, con la distribuzione marginale di Y , le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio C. a) Le distribuzioni marginali di X e di Y rispetto alla distribuzione congiunta A sono:

x	1	2	3
$f_X(x)$	1/6	2/6	3/6

y	1	2	3
$f_Y(y)$	1/6	2/6	3/6

Osservando che $f(1, 2) = 0 \neq (1/6) \cdot (2/6) = f_X(1) \cdot f_Y(2)$, si può concludere che le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

b) Le distribuzioni marginali di X e di Y rispetto alla distribuzione congiunta B sono:

x	1	2	3
$f_X(x)$	1/6	2/6	3/6

y	1	2	3
$f_Y(y)$	1/6	2/6	3/6

Dato che $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, per ogni $x = 1, 2, 3$ e $y = 1, 2, 3$, allora le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti.

c) Le distribuzioni condizionate della Y sono date da:

y	1	2	3
$P(Y = y X = 1)$	1/6	2/6	3/6

y	1	2	3
$P(Y = y X = 2)$	1/6	2/6	3/6

y	1	2	3
$P(Y = y X = 3)$	1/6	2/6	3/6

Si può osservare che le distribuzioni condizionate di Y , dato $X = x$, per $x = 1, 2, 3$, sono uguali alla distribuzione marginale di Y ; infatti le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti.

d) Le distribuzioni condizionate di X sono date da:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{P}(X = x|Y = 1) & 1/6 & 2/6 & 3/6 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{P}(X = x|Y = 2) & 1/6 & 2/6 & 3/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{P}(X = x|Y = 3) & 1/6 & 2/6 & 3/6 \end{array}$$

Le distribuzioni condizionate di X dato $Y = y$, per $y = 1, 2, 3$, sono uguali alla distribuzione marginale di X , essendo X ed Y variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio D. Indicando con X il numero di uova deposte, si ha $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Inoltre, indicando con Y il numero di nuovi insetti, allora la distribuzione condizionata di Y , dato $X = x$, è data da

$$Y|X = x \sim \text{Bin}(x, p).$$

(Si osservi che se il numero di uova deposte è x , allora il numero di nuovi insetti può essere $0, 1, \dots, x$). Allora la probabilità che si possano sviluppare y nuovi insetti, per $y = 0, 1, 2, \dots$, è data da:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = y) &= \mathbf{P}(Y = y|X = y) \cdot \mathbf{P}(X = y) + \mathbf{P}(Y = y|X = y + 1) \cdot \mathbf{P}(X = y + 1) \\ &\quad + \mathbf{P}(Y = y|X = y + 2) \cdot \mathbf{P}(X = y + 2) + \dots \\ &= \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{1}{(x-y)!} (1-p)^{x-y} \lambda^{x-y+y} \\ &= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \lambda^y \sum_{x=y}^{\infty} \frac{1}{(x-y)!} (1-p)^{x-y} \lambda^{x-y} \\ &= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \lambda^y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^k}{k!} = \frac{(p\lambda)^y e^{-\lambda}}{y!} \cdot e^{(1-p)\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^y e^{-\lambda p}}{y!}. \end{aligned}$$

Pertanto $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$.