

Calcolo delle Probabilità

Esercitazione 4. Probabilità condizionata, indipendenza, Teorema di Bayes

Esercizio A. Siano A, B, C tre eventi. Si dimostri che

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Esercizio B. Si scelga a caso un punto all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità p che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

Esercizio C. Una moneta non truccata viene lanciata tre volte.

a) Determinare la probabilità p che si presenti “testa” in tutti e tre i lanci sapendo che:

- (i) al primo lancio si presenta “testa”;
- (ii) si presenta “testa” in almeno uno dei lanci.

b) Dire se gli eventi A e B sono indipendenti, dove:

- (i) $A = \{\text{si presenta “croce” al secondo lancio}\}$, $B = \{\text{al primo e al terzo lancio si presentano facce diverse della moneta}\}$;
- (ii) $A = \{\text{si presenta “croce” al primo lancio}\}$, $B = \{\text{si presenta due volte “croce”}\}$.

c) Ripetere il punto b), parte (i), supponendo che dopo il primo lancio si proceda nel modo seguente:

- si utilizza una moneta truccata in modo tale che $P(\{T\}) = 2/3$, $P(\{C\}) = 1/3$ se nel lancio precedente si presenta “testa”;
- si utilizza una moneta truccata in modo tale che $P(\{T\}) = 1/4$, $P(\{C\}) = 3/4$ se nel lancio precedente si presenta “croce”.

Esercizio D. Un soggetto scelto a caso viene sottoposto al test per l'AIDS. Si supponga che nella popolazione un individuo ogni 10000 abbia l'AIDS e che la probabilità che il test risulti positivo quando l'individuo ha l'AIDS sia 0,99, mentre la probabilità che il test risulti positivo quando l'individuo non ha l'AIDS sia 0,05. Sapendo che il soggetto è risultato positivo al test, determinare la probabilità che egli abbia l'AIDS.

Esercizio E. Siano U_1, U_2, U_3 tre urne di cui

- U_1 contiene 3 palline rosse e 5 verdi;
- U_2 contiene 2 palline rosse e 1 verde;
- U_3 contiene 2 palline rosse e 3 verdi.

Si scelga a caso un'urna e se ne estragga una pallina. Costruire il diagramma ad albero dell'esperimento e calcolare la probabilità che la pallina provenga dall'urna U_1 sapendo che la pallina è rossa.