

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 7. Valore atteso e varianza

Esercizio A. Per la variabile aleatoria X , valore atteso, momento secondo e varianza sono dati da:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = 2,53, \\ E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{11}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} + 3^2 \cdot \frac{7}{36} + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = 8,36, \\ \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 8,36 - (2,53)^2 = 1,96, \end{aligned}$$

per cui, la deviazione standard è pari a $\sigma_X = \sqrt{1,96} = 1,4$.

Per la variabile aleatoria Y , valore atteso, varianza e deviazione standard sono dati da:

$$E(Y) = 6,61, \quad \text{Var}(Y) = 11,13, \quad \sigma_Y = 3,34.$$

Per la variabile aleatoria W , valore atteso, varianza e deviazione standard sono dati da:

$$E(W) = 8,75, \quad \text{Var}(W) = 16,97, \quad \sigma_W = 4,12.$$

Esercizio B. Indicando con X il numero di punte difettose presenti in ciascuna scatola e sapendo che $X \sim \text{Bin}(n; p)$, dove $n = 100$ e $p = 0,02$, il numero atteso di punte difettose è dato da

$$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,02 = 2.$$

Esercizio C. Valore atteso e varianza della variabile standardizzata Y sono dati da

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0, \\ \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} = 1. \end{aligned}$$

Esercizio D. Indicando con C_1 il capitale del giocatore dopo il primo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/2$	$2C$
$P(C_1 = x)$	$2/3$	$1/3$

Analogamente, indicando con C_2 il capitale del giocatore dopo il secondo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/4$	C	$4C$
$P(C_2 = x)$	$4/9$	$4/9$	$1/9$

Infine, indicando con C_3 il capitale del giocatore dopo il terzo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/8$	$C/2$	$2C$	$8C$
$P(C_3 = x)$	$8/27$	$12/27$	$6/27$	$1/27$

Il capitale atteso del giocatore dopo ciascuno dei tre lanci è dato dal valore atteso delle variabili aleatorie C_1 , C_2 e C_3 :

$$E(C_1) = (C/2) \cdot (2/3) + 2C \cdot (1/3) = C,$$

$$E(C_2) = (C/4) \cdot (4/9) + C \cdot (4/9) + 4C \cdot (1/9) = C,$$

$$E(C_3) = (C/8) \cdot (8/27) + (C/2) \cdot (12/27) + 2C \cdot (6/27) + 8C \cdot (1/27) = C.$$

Sulla base del valore atteso della scommessa, partecipare o meno al gioco è indifferente perchè il valore atteso del capitale alla fine del gioco è pari al valore iniziale del capitale.