

## Calcolo delle Probabilità

### Soluzioni 9. Distribuzione di Poisson e distribuzione geometrica

**Esercizio A. a)** La probabilità che nel periodo considerato ci siano più di due chiamate è data da

$$\begin{aligned} P(\text{più di 2 chiamate}) &= 1 - P(\text{fino a 2 chiamate}) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[ \frac{15^0 \cdot e^{-15}}{0!} + \frac{15^1 \cdot e^{-15}}{1!} + \frac{15^2 \cdot e^{-15}}{2!} \right] = 0,9996. \end{aligned}$$

**b)** La probabilità che nel periodo considerato ci siano esattamente 20 chiamate è data da

$$P(X = 20) = \frac{15^{20} \cdot e^{-15}}{20!} = 0,042.$$

**Esercizio B. a)** Si indichi con  $X$  la variabile aleatoria che conta il numero di errori di stampa presenti nella prima pagina. Allora  $X \sim \text{Bin}(300, 1/500)$ . Pertanto

$$P(X = 2) = \binom{300}{2} \left(\frac{1}{500}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{298} = 0,0988,$$

e

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{300}{0} \left(\frac{1}{500}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{300} - \binom{300}{1} \left(\frac{1}{500}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{299} = 0,1218. \end{aligned}$$

**b)** Posto  $\lambda = n \cdot p = 300/500 = 3/5$ , allora  $X$  può essere assunta approssimativamente distribuita come una variabile di Poisson di media pari a  $\lambda = 3/5$ . Pertanto

$$P(X = 2) \simeq \frac{(3/5)^2 \cdot e^{-(3/5)}}{2!} = 0,0988,$$

e

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \simeq 1 - \frac{(3/5)^0 \cdot e^{-(3/5)}}{0!} - \frac{(3/5)^1 \cdot e^{-(3/5)}}{1!} = 0,1219.$$

**Esercizio C. a)** Indicando con  $N$  il numero di giorni in cui l'investitore tiene l'azione, allora  $N$  è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro  $p = 1/2$ . Pertanto il numero atteso di giorni in cui l'investitore tiene l'azione è pari a

$$E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/2} = 2,$$

mentre la probabilità che l'investitore rivenda l'azione alla fine del quinto giorno è pari a

$$P(N = 5) = p \cdot (1 - p)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^5} = 0,031.$$

**b)** Applicando la proprietà di “assenza di memoria” della distribuzione geometrica, si ottiene:

$$\begin{aligned} P(N = 15 | N > 10) &= P(N > 14 | N > 10) - P(N > 15 | N > 10) \\ &= P(N > 4) - P(N > 5) = P(N = 5) = 0,031. \end{aligned}$$

**c)** Costruendo il diagramma ad albero relativo all’investimento, si può notare che l’investitore subisce una perdita solo se il prezzo dell’azione scende il primo o il secondo giorno. Pertanto

$$P(\text{l'investitore subisce una perdita}) = P(N = 1) + P(N = 2) = p + p(1 - p) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

**Esercizio D.** Si consideri l’evento che esce il numero 6 come l’evento “successo”. Allora la variabile aleatoria  $N$  che rappresenta il numero delle prove necessarie affinché esca per la prima volta il numero 6 ha una distribuzione di probabilità geometrica con parametro  $p = 1/6$ .

**a)** La probabilità che vinca il primo che inizia a lanciare è data da:

$$\begin{aligned} P(N = 1) + P(N = 3) + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = 2n + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot (1 - p)^{2n} \\ &= \frac{p}{1 - (1 - p)^2} = \frac{1/6}{1 - (1 - 1/6)^2} = 0,545. \end{aligned}$$

**b)** La probabilità che vinca il secondo che inizia a lanciare è pari a:

$$1 - P(\text{vince il primo a lanciare}) = 1 - 0,545 = 0,455.$$