Marco Minozzo
Laurea in Economia e Management delle Imprese di Servizi
Università degli Studi di Verona

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 2. Calcolo combinatorio

Esercizio A. Le cifre dispari sono $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. La prima cifra del numero può essere scelta in 5 modi, la seconda in 4 modi, la terza in 3 modi, la quarta in 2 modi e l'ultima è la cifra che ancora non è stata scelta. I numeri formati da 5 cifre dispari distinte sono dunque $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Le cifre pari sono $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Le cifre pari uguali che devono seguire le cinque cifre dispari possono essere scelte in 5 modi. I numeri formati da 5 cifre dispari seguite da 2 cifre pari uguali sono dunque $(5!) \cdot 5 = 120 \cdot 5 = 600$.

Esercizio B. Ci sono 2 modi per scegliere la squadra del vincitore; dopo di che, c'è solo da ordinare i cavalieri delle due formazioni. Si ottiene $2 \cdot (5!)^2 = 28800$.

Esercizio C. a) Le sette persone si possono disporre lungo una linea in $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 2 \cdot 1 = 7!$ modi.
b) Una persona può sedersi in un posto qualsiasi del tavolo circolare. Le altre 6, allora, possono sedersi in $6 \cdot 5 \cdots 2 \cdot 1 = 6!$ modi. (In generale si parla di *permutazioni circolari*: n oggetti possono essere sistemati attorno ad un cerchio in $(n-1)!$ modi.)

Esercizio D. a) Ogni pallina del campione ordinato può essere estratta in 8 modi, quindi ci sono $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$ campioni con reinserimento.

b) La prima pallina del campione ordinato può essere estratta in 8 modi, la successiva in 7 modi e l'ultima in 6 modi. Ci sono quindi $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ campioni senza reinserimento.

Esercizio E. Si supponga inizialmente che Bruno si sia piazzato al terzo posto: resta solo da scegliere gli altri 4 vincitori dai 19 concorrenti rimasti; ciò può essere fatto in $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 93024$ modi.

Si consideri ora il caso che Bruno sia tra i vincitori: ciò significa che Bruno può occupare uno qualunque dei primi 5 posti, per cui restano poi da scegliere gli altri 4 vincitori dai 19 concorrenti rimasti. Ci sono dunque $5 \cdot 93024 = 465120$ possibili assegnazioni.

Esercizio F. La prima bottiglia può essere scelta in 100 modi, la seconda in 99 modi; i modi per scegliere le due bottiglie sono, pertanto, $100 \cdot 99 = 9900$.

Esercizio G. Essendo due numeri già fissati, resta solo da sceglierne altri 3 dai rimanenti 88; pertanto le possibili cinquine in cui compaiono due numeri prefissati sono:

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = 109736.$$

Esercizio H. Ci sono 5 modi di scegliere il Paese con almeno 3 vincitori; si indichi con A il Paese scelto. Se i vincitori di A sono esattamente 3, se ne devono scegliere 3 tra i 6 elementi di A e 2 tra i 24 componenti delle squadre degli altri Paesi. Se tra i vincitori ci sono 4 elementi di A bisogna scegliere questi 4 tra i 6 elementi del Paese e 1 fra gli altri 24 componenti delle squadre degli altri paesi. Nell'ultimo caso basta solo scegliere i 5 vincitori di A tra i 6 elementi di A. Si ottiene così:

$$5 \cdot \left[\binom{6}{3} \cdot \binom{24}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{24}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{24}{0} \right] = 29430.$$

Esercizio I. I possibili modi di suddividere le 20 cavie in 2 gruppi da 10 sono

$$C_{20,10} = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!}.$$

Esercizio J. a) Le 8 domande possono essere scelte in $C_{10,8}$ modi, dove

$$C_{10,8} = \binom{10}{8} = 45.$$

b) Se lo studente deve rispondere alle prime 3 domande, può scegliere le altre 5 tra le rimanenti 7; ciò può essere fatto in

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$$

modi.
c) Se risponde alle prime 5 domande, allora può scegliere le altre 3 domande tra le ultime 5 in $C_{5,3}$ modi. Se, invece, risponde solo a 4 delle prime 5 domande, può scegliere queste prime 4 in $C_{5,4}$ modi e le altre 4 tra le ultime 5 in $C_{5,4}$ modi. Lo studente ha allora un totale di

$$C_{5,3} + C_{5,4} \cdot C_{5,4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} = 10 + 5 \cdot 5 = 35$$

scelte.

Esercizio K. I tre uomini possono essere scelti tra i 7 uomini in $C_{7,3}$ modi e le due donne possono essere scelte tra le 5 donne in $C_{5,2}$ modi. Pertanto le commissioni possono essere scelte in

$$C_{7,3} \cdot C_{5,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$$

modi.