ISTITUZIONI DI STATISTICA – A. A. 2006/2007

Marco Minozzo

Laurea in Economia e Management delle Imprese di Servizi

Università degli Studi di Verona

Calcolo delle Probabilità
Esercitazione 14. Legge (debole) dei grandi numeri

Combinazioni lineari

Esercizio A. Siano X_1 ed X_2 due variabili aleatorie con valore atteso $\mathrm{E}(X_1) = 1$ e $\mathrm{E}(X_2) = 2$ e varianza $\mathrm{Var}(X_1) = 1$ e $\mathrm{Var}(X_2) = 3$, e sia $Y = 2X_1 + X_2$.

a) Determinare valore atteso e varianza di Y nel caso in cui $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0,5$.

b) Determinare valore atteso e varianza di Y nel caso in cui X_1 ed X_2 siano indipendenti.

Esercizio B. Un portafoglio azionario è costituito da 60 azioni di tre diversi titoli: 10 azioni del primo titolo, 20 azioni del secondo titolo e 30 azioni del terzo titolo. Si supponga che la quotazione giornaliera dei tre titoli (in euro) possa essere descritta dalle variabili aleatorie X_1, X_2 e X_3 e che $\mathrm{E}(X_1) = 3$, $\mathrm{E}(X_2) = 2,5$, $\mathrm{E}(X_3) = 4$ e $\mathrm{Var}(X_1) = 0,5$, $\mathrm{Var}(X_2) = 0,8$, $\mathrm{Var}(X_3) = 1$.

a) Supponendo che i tre titoli non si comportino in modo indipendente e che $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0,6$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = 0,6$ e $\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 0,85$, determinare valore atteso e varianza del valore giornaliero del portafoglio.

b) Determinare valore atteso e varianza del valore giornaliero del portafoglio nel caso in cui i tre titoli si comportino in modo indipendente.

Legge (debole) dei grandi numeri

Esercizio C. Si assuma che il risultato di un certo esperimento possa essere descritto da una variabile aleatoria discreta X con la seguente distribuzione di probabilità

x	$\mu-2$	$\mu-1$	μ	$\mu+1$	$\mu+2$
$f(x)$	1/10	2/10	4/10	2/10	1/10

dove μ è un numero reale incognito. Si può verificare che $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = 1,2$. Si assuma inoltre di ripetere l'esperimento n volte sotto le medesime condizioni e di considerare la media aritmetica $\overline{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ degli n risultati ottenuti.

a) Determinare $\mathrm{E}(\overline{X}_n)$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.

b) Assumendo che $n = 100$, determinare un limite inferiore alla probabilità che la media campionaria disti meno di 0,5 dalla media μ.

c) Determinare n tale che si abbia una probabilità di almeno il 95% che $\overline{X}_n$ disti meno di 0,2 da μ.

Esercizio D. Si supponga che le lampade prodotte con un processo produttivo tradizionale abbiano una durata media di 2000 ore con una deviazione standard di 250 ore, e si supponga che si consideri conveniente sostituire il processo se la durata media può essere aumentata di almeno il 10%. Un ingegnere vuole provare un nuovo processo produttivo per il quale si può assumere che la deviazione standard della distribuzione della durata sia uguale a quella del processo tradizionale. Quanto grande dovrebbe essere il campione di lampadine da esaminare prodotte con il nuovo processo per avere una probabilità di almeno il 99% che la media campionaria delle durate disti meno di 50 ore dalla media effettiva del nuovo processo?